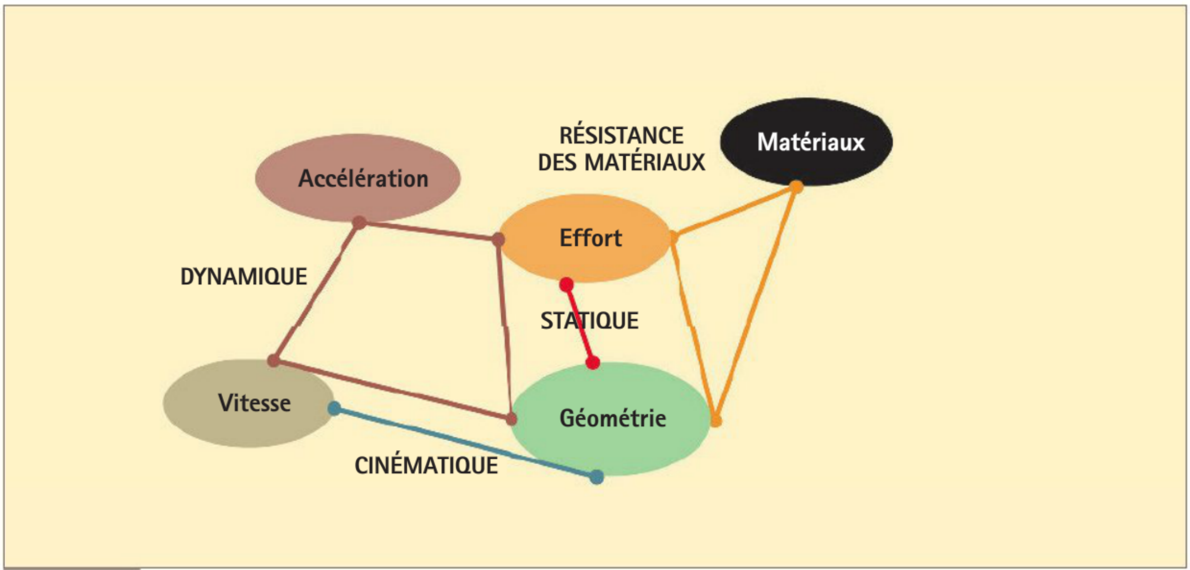
FICHE CONNAISSANCE

C3-10 Comportement mécanique des systèmes

OBJECTIF *Dimensionner des structures et prédire leur comportement mécanique sous charge.*

Le comportement mécanique d'une structure est conditionné par une géométrie, un ou des matériaux, des efforts appliqués et des déformations qui en découlent. Prédire et maîtriser le comportement mécanique d'un système, c'est maîtriser la relation entre tous ces éléments.



Document 1 Les quatre champs d'étude de la mécanique

La mécanique des solides s'intéresse à plusieurs volets du comportement des structures des systèmes : la statique, la cinématique, la dynamique et la résistance des matériaux.

1 Conditions d'équilibre des solides

Voir fiche C 3.6

1.1 Notion d'équilibre

Un solide S (ou un ensemble de solides) est en équilibre dans un référentiel $\mathfrak{R}$ si aucun mouvement de S par rapport à ce repère n'est possible au cours du temps. Il y a équilibre si l'ensemble des efforts appliqués s'annulent, ce qui se traduit par le principe fondamental de la statique.

Remarque : dans tous les cas, la masse des solides ne varie pas dans le temps.

Principe fondamental de la statique

Un solide ou un ensemble de solides est en équilibre si la somme des forces extérieures qui lui sont appliquées et la somme des moments de celles-ci sont nulles.

Sous forme de torseurs, cela se traduit par : la somme des torseurs des efforts extérieurs est nulle.

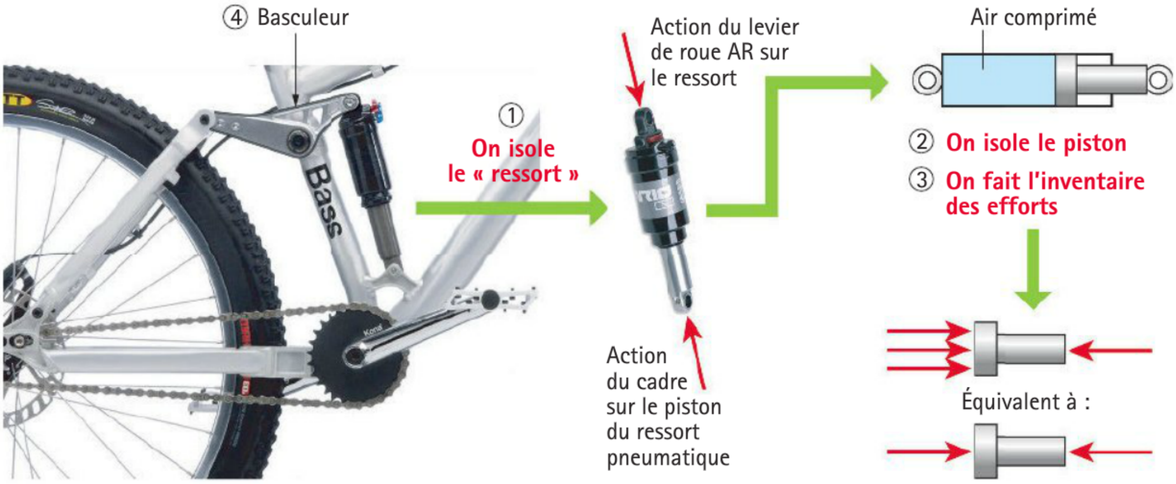
a) Cas d'un solide soumis à deux forces

EXEMPLE

Suspension arrière de VTT par « ressort pneumatique »

- *Problème technique posé* : déterminer la condition d'équilibre du ressort pneumatique afin de calculer ultérieurement la pression nécessaire de l'air comprimé dans le cylindre.
- *Hypothèses* :
  - l'action de l'air sur le piston est uniformément répartie et peut être représentée par une force (résultante des forces élémentaires agissant par unité de surface) ;
  - les frottements sont négligés devant les autres efforts ;
  - l'effet de la pesanteur est négligé devant les autres efforts.

En suivant la démarche du document 2, on conclut que le piston est soumis à deux forces.



Document 2 **Détermination des conditions d'équilibre du piston de ressort pneumatique**

L'application du principe fondamental de la statique permet d'affirmer que les deux vecteurs force sont égaux et opposés. On peut donc déduire de cet exemple que :

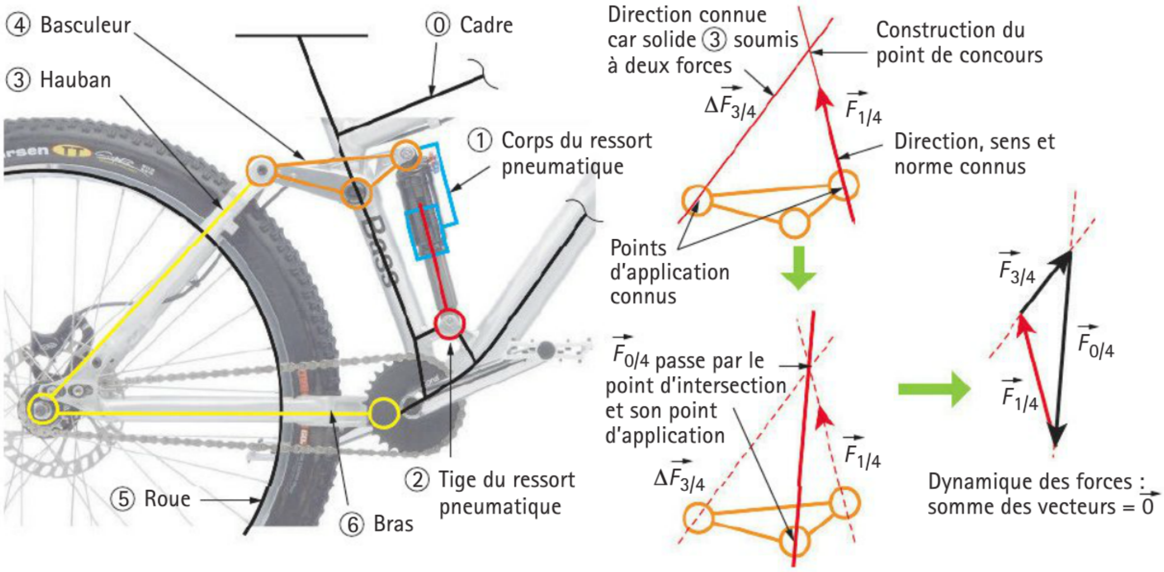
Un solide soumis à deux forces est en équilibre si et seulement si ces deux forces sont **égales et directement opposées**, c'est-à-dire que les vecteurs qui les représentent ont le **même support, la même norme et sont de sens opposés**.

b) Cas d'un solide soumis à trois forces

Dans le cas d'un solide soumis à trois forces non parallèles, d'après le principe fondamental de la statique, l'équilibre s'obtient lorsque ces **trois forces sont concourantes et leur somme vectorielle est nulle**.

En effet, si les vecteurs force sont concourants, leurs moments par rapport à ce point de concours sont nuls et la somme de leurs moments en tout point aussi.

Dans le cas précédent, en isolant le basculeur 4 :



Document 3 **Conditions d'équilibre d'un solide soumis à trois forces**

On voit sur le document 3 comment, en isolant le basculeur, on peut construire graphiquement une « dynamique des forces » qui permet de mesurer la norme de chaque vecteur.

1.2 Principe fondamental de la statique

Il se généralise de la manière suivante :

Il existe au moins un référentiel $\mathfrak{R}_g$, appelé référentiel galiléen, tel que pour tout système matériel S en équilibre dans $\mathfrak{R}_g$, les deux théorèmes suivants s'appliquent :

- Théorème de la résultante statique : pour tout système S en équilibre dans un référentiel galiléen $\mathfrak{R}_g$, la résultante des actions mécaniques exercées par $\overline{S}$ sur S est nulle : $\vec{R}_{(\overline{S}\to S)} = \vec{0}$.
- Théorème du moment statique : pour tout système S en équilibre dans un référentiel galiléen $\mathfrak{R}_g$, le moment résultant en un point A quelconque des actions mécaniques exercées par $\overline{S}$ sur S est nul : $\forall A \quad \vec{M}_{A(\overline{S}\to S)} = \vec{0}$

Remarque : un système sera défini comme statiquement plan si l'ensemble des forces appartient à un même plan et, par conséquent, le moment des forces est perpendiculaire au plan. Cette propriété permet de déterminer graphiquement les actions mécaniques.

Dans le cas général (solide soumis à plus de trois forces et hypothèse de problème plan non valide), le Principe fondamental de la statique se vérifie de manière analytique.

2 Résistance des matériaux

La résistance des matériaux concerne l'étude des déformations. Elle utilise les lois de comportement des matériaux pour déterminer les contraintes et déformations d'un composant en fonction des actions extérieures qui sont appliquées à un solide déformable.

Voir fiche C 3.9

2.1 Sollicitations

Une sollicitation est un cas d'application des efforts sur un solide déformable qui permet d'établir des relations entre efforts et déformations. Par exemple, la tige du piston précédent est soumise à la compression et sa longueur diminue sous l'effort. La manivelle du pédalier est soumise à la flexion et se courbe sous l'effort. Ces déformations sont réversibles tant que le matériau reste dans sa zone d'élasticité. Les sollicitations simples que l'on peut rencontrer couramment sont présentées dans le tableau du paragraphe 2.4.

2.2 Relation sollicitation-déformation

Pour déterminer la relation entre une sollicitation et les déformations qu'elle induit, on retient les hypothèses suivantes sur le matériau :

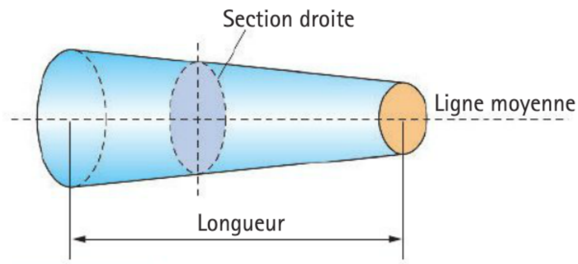
– **homogénéité** : les matériaux ont les mêmes propriétés mécaniques en tout point ;

– **isotropie** : les matériaux ont, en un même point, les mêmes propriétés physiques dans toutes les directions.

• **Le premier modèle** utilisable correspond aux solides dont les caractéristiques géométriques peuvent permettre de les assimiler à une poutre droite qui doit avoir les caractéristiques suivantes :

– les centres de gravité des sections forment une ligne continue droite ou très faiblement incurvée appelée **ligne moyenne** ;

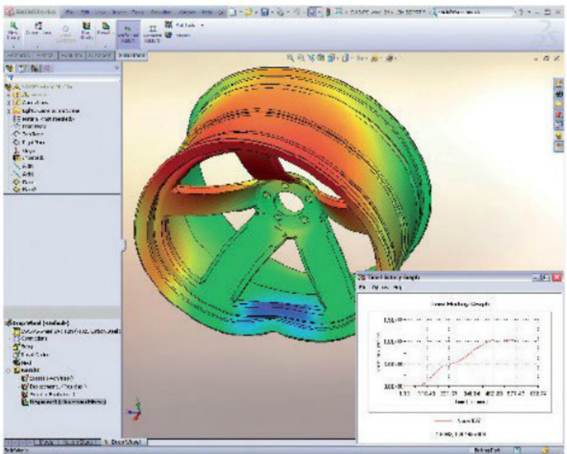
– la dimension des sections droites est petite devant la longueur de la ligne moyenne et varie lentement. En pratique, on considère que la longueur de la ligne moyenne doit être supérieure à cinq fois la plus grande des dimensions transversales.



Document 4 Exemple de poutre droite

Dans ce cas, le calcul des déformations et de la résistance du solide déformable en fonction de sa géométrie et des efforts appliqués est réalisable par des calculs simples. Toutefois, les résultats sont relativement approximatifs en raison des hypothèses retenues ci-dessus.

• **Le second modèle** utilisable est le modèle par éléments finis qui est le « moteur » des logiciels de simulation numérique. Ce modèle est adapté à des formes de pièces quelconques. Il intègre les conséquences de particularités comme les accidents de forme (changement brusque de dimension, trous…). Les résultats obtenus sont plus proches de la réalité. On trouve des logiciels de calcul de structures associés à tous les logiciels de CAO volumique.



Document 5 Modèle par éléments finis (DS Systèmes SolidWorks Corp.)

2.3 Notion de contrainte

Afin de disposer d'éléments de comparaison indépendants de la géométrie des solides étudiés, on définit le concept de contrainte. Une contrainte représente un élément des efforts de cohésion interne du matériau qui lui permettent de résister aux efforts extérieurs qui lui sont appliqués. Elle s'exprime en termes de pression (newtons par unité de surface). Par exemple, une poutre sur laquelle on tire subira une contrainte de traction normale à une section droite quelconque.

La **loi de Hooke** précise que, dans le domaine élastique du matériau, les déformations sont proportionnelles aux contraintes :

$$\boxed{\sigma = E \cdot \varepsilon \quad \text{où} \quad \varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0}}$$

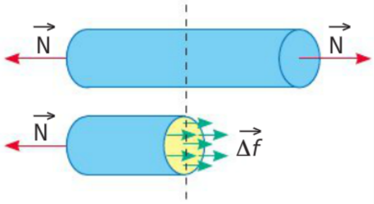
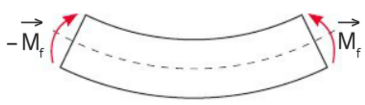
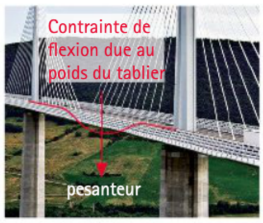
avec :
σ : contrainte en N/mm^2,
ε : allongement unitaire, avec l la longueur de la poutre sous charge et l_0 la longueur initiale,
E : module de Young.

Le **module de Young** est une caractéristique du matériau, il est exprimé, lui aussi, en unité de pression.

- Quelques valeurs de E en GPa (1 000 N/mm^2) :

Aluminium (Al) 69, Duralumin (AU4G) 75, Cuivre (Cu) 124, Or (Au) 78, Plomb (Pb) 18, Acier de construction 210, Acier à ressorts 220, Carbure de tungstène (WC) 650, Béton 20 à 50, Brique 14, Chêne 12, Bambou 20, Fibre de carbone HR 240, Kevlar 34,5, Nanotubes de Carbone 1 100, Nylon 2 à 5, Plexiglas 2,38.

2.4 Récapitulation

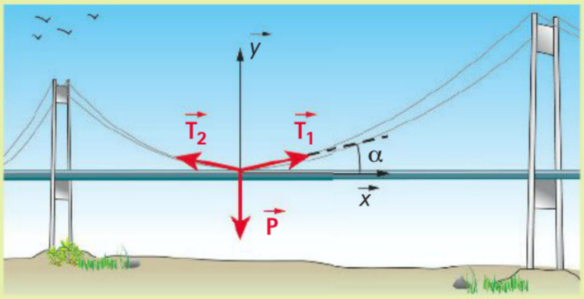
Sollicitations	Contraintes	Définition	Exemple d'un pont
Traction ou compression	 Avec Δf = force de cohésion dans la section par unité de surface. $\vec{N} = \Sigma \vec{\Delta f} t$	$\sigma = \frac{N}{S}$ σ : contrainte normale en MPa N : effort normal en N S : aire de la section droite en m^2 Soumise à la traction, la poutre s'allonge sous l'effet de l'effort. Soumise à la compression, la poutre rétrécit sous l'effet de l'effort.	
Flexion simple	 $\vec{M_f} = \vec{M}$ dans une section droite.	$\sigma = \dfrac{M_f}{\frac{I_{Gz}}{y}}$ σ : contrainte normale en MPa y : distance du point M au barycentre de la section en m M_f : moment de flexion en N.mm I_{Gz} : moment quadratique de la section en m^4, grandeur caractéristique de la forme de la section droite. Soumise à la flexion, la poutre plie sous l'effet de l'effort.	

À moi de le faire !

Sur un pont à haubans, α correspond à l'angle formé par les câbles avec le tablier au niveau de la jonction avec le tablier (diamètre d'un câble : 20 cm). Le tablier exerce un effort P verticalement au niveau de cette jonction. La résistance à la rupture d'un câble est égale à 1700 N/mm^2.

Elle est définie par $R_{rupture}$ = force maximale supportée / surface de la section du câble.

On considère la partie centrale du tablier de hauteur 1 m, de largeur 20 m et de longueur 100 m. Le tablier est en acier et son volume est un parallélépipède avec μ_{acier} = 7 800 kg/m^3.



1) En appliquant le principe fondamental de la statique à la jonction isolée (point), montrer que $T_1 = T_2 = \dfrac{p}{2\sin\alpha}$.

2) Calculer cette valeur si α = 15 °, puis calculer l'effort qu'un câble supporte ainsi.
La valeur de résistance à la rupture est-elle dépassée ?
Si oui, proposer des solutions de principe pour l'éviter.