STATIQUE DES SYSTEMES MATERIELS

1) NOTION DE SYSTEME MATERIEL

On appelle système matériel un ensemble de points matériels (ce peut être un solide, un ensemble de solides, une portion de fluide, etc.).
Pour la suite de ce cours, on se limitera aux systèmes matériels composés de un ou plusieurs solides.

2) "PRINCIPE" FONDAMENTAL DE LA STATIQUE (PFS)

Ce "principe" s'énonce de la manière suivante :

> Un système matériel Σ est en équilibre par rapport à un repère galiléen R_g entre les dates t_1 et t_2 si et seulement si :
>
> - à la date t_1, Σ est en équilibre par rapport à R_g ;
> - et à toute date comprise entre t_1 et t_2 on a : $\left\{\tau(\overline{\Sigma}\rightarrow\Sigma)\right\}=\left\{0\right\}$ **(1)**

Quelques remarques sont nécessaires :

Rq1 : Les lois de la mécanique sont définies dans un repère "absolu" (repère de Copernic) ou dans des repères en translation rectiligne uniforme par rapport au repère absolu (repères galiléens R_g).

Rq2 : $\overline{\Sigma}$ représente tout ce qui est **extérieur** au système matériel isolé Σ. Donc le torseur $\left\{\tau(\overline{\Sigma}\rightarrow\Sigma)\right\}$ représente toutes les actions mécaniques **extérieures** appliquées sur Σ.

Rq3 : Les torseurs de la relation (1) doivent être exprimés au même point d'application et dans le repère R_g.

3) THEOREMES GENERAUX DE LA STATIQUE

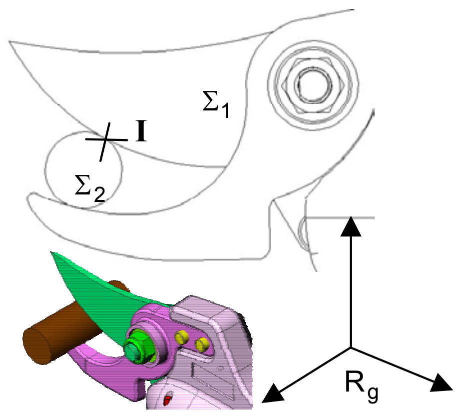
La relation (1) peut s'écrire : $\left\{\begin{matrix}\vec{R}\left\{\tau(\overline{\Sigma}\rightarrow\Sigma)\right\}\\ \vec{M}_P\left\{\tau(\overline{\Sigma}\rightarrow\Sigma)\right\}\end{matrix}\right\}_P=\left\{\begin{matrix}\vec{0}\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_P$. On en déduit alors :

> Théorème de la résultante statique : $\vec{R}\left\{\tau(\overline{\Sigma}\rightarrow\Sigma)\right\}=\vec{0}$
>
> Théorème du moment statique au point P : $\vec{M}_P\left\{\tau(\overline{\Sigma}\rightarrow\Sigma)\right\}=\vec{0}$

Remarque : De ces deux équations vectorielles découlent six équations scalaires (problème dans l'espace) ou trois équations scalaires (problème plan).

4) THEOREME DES ACTIONS RECIPROQUES

Considérons deux systèmes matériels en contact et en équilibre par rapport à R_g (schéma d'un sécateur ci-contre).



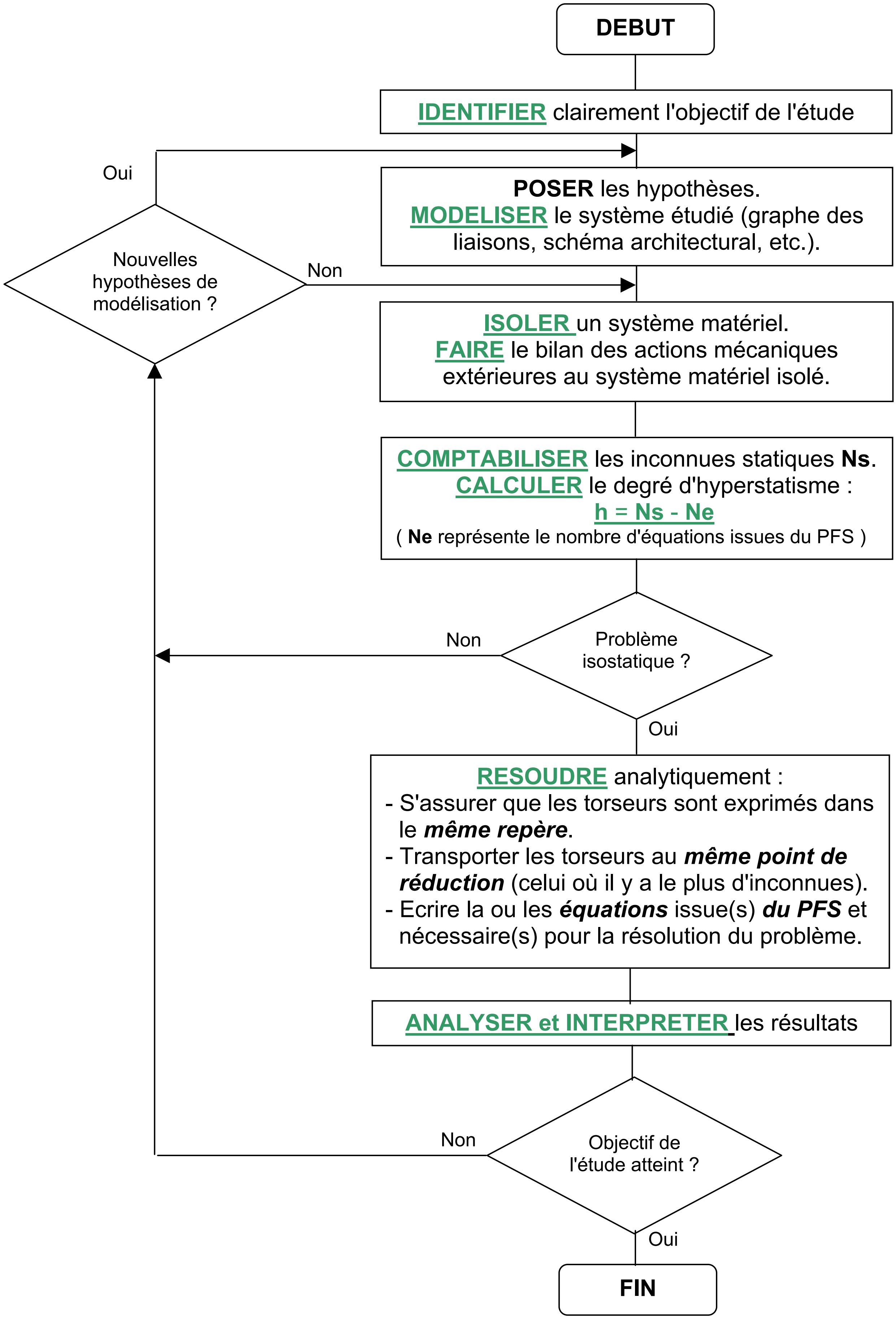
En utilisant le PFS, on montre que :

$$\boxed{\left\{\tau(\Sigma_1\rightarrow\Sigma_2)\right\}=-\left\{\tau(\Sigma_2\rightarrow\Sigma_1)\right\}}$$

Conséquence : une permutation des indices sur la notation vectorielle ou scalaire d'une action mécanique entraîne donc un changement de signe de celle-ci.

5) RESOLUTION ANALYTIQUE D'UN PROBLEME DE STATIQUE

La démarche de résolution est la suivante :



6) <u>RESOLUTION GRAPHIQUE D'UN PROBLEME DE STATIQUE</u>

6-1) Représentation graphique d'un glisseur :

Un glisseur est un torseur ayant la forme suivante : $\{\tau(\Sigma_2 \to \Sigma_1)\} = {}_P\left\{ \begin{matrix} \vec{R}_{\{\tau(2\to1)\}} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}$.

On montre que ce glisseur est représentable graphiquement par le vecteur glissant $(P, \vec{R}_{\{\tau(2\to1)\}})$ dont la direction passe par le point d'application P.

6-2) Domaine d'étude de la statique graphique :

La statique graphique s'applique exclusivement aux problèmes plan faisant intervenir des **actions mécaniques** modélisables par des glisseurs coplanaires.

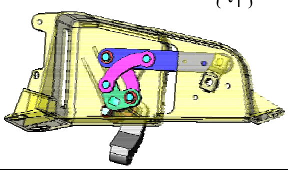
6-3) Equilibre graphique d'un système matériel soumis à deux glisseurs :

Considérons le système matériel Σ soumis à deux actions mécaniques modélisables par des glisseurs. Pour simplifier, on notera les résultantes de ces deux glisseurs : $\vec{R}_{\{\tau_1\}}$ et $\vec{R}_{\{\tau_2\}}$.

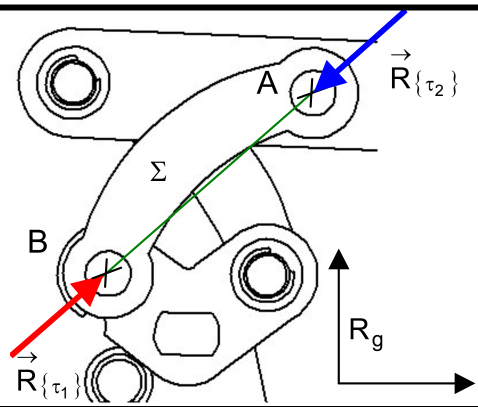
On montre que :

Un système matériel soumis à deux glisseurs est en équilibre si et seulement si :

- $\vec{R}_{\{\tau_1\}} + \vec{R}_{\{\tau_2\}} = \vec{0}$ (les normes des deux résultantes sont égales).
- Les résultantes $\vec{R}_{\{\tau_1\}}$ et $\vec{R}_{\{\tau_2\}}$ ont le même support.



Exemple : timonerie d'essuie-glace de Twingo



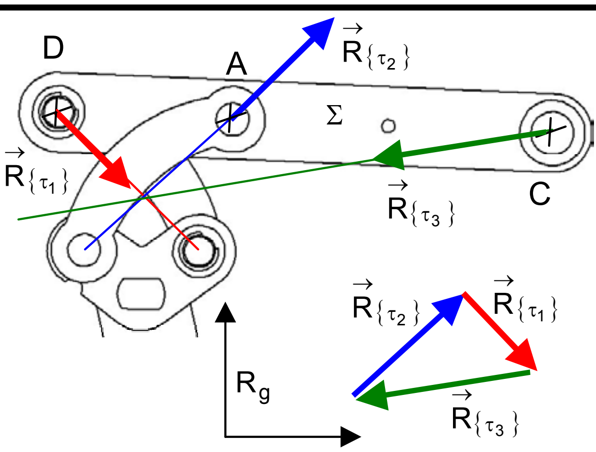
6-4) Equilibre graphique d'un système matériel soumis à trois glisseurs :

Considérons le système matériel Σ soumis à trois actions mécaniques modélisables par des glisseurs. Pour simplifier, on notera les résultantes de ces trois glisseurs : $\vec{R}_{\{\tau_1\}}$, $\vec{R}_{\{\tau_2\}}$ et $\vec{R}_{\{\tau_3\}}$.

On montre que :

Un système matériel soumis à trois glisseurs est en équilibre si et seulement si :

- Le polygone formé par les résultantes est fermé. Ce polygone s'appelle **dynamique des forces**. (c'est la traduction graphique du théorème de la résultante statique)
- Les supports des trois résultantes sont coplanaires et **concourantes** en un même point. (c'est la traduction graphique du théorème du moment statique)



Exemple : timonerie d'essuie-glace de Twingo

Remarque : Dans ce cours, on ne traite pas le cas où les résultantes des trois glisseurs ont des supports parallèles.

6-4) <u>Méthode de résolution d'un problème de statique graphique</u> :

La démarche de résolution est la suivante :