Compétence(s) accessible(s) :
- Associer à chaque liaison les paramètres géométriques et les grandeurs de vitesse qui définissent les mouvements permis,
- Déterminer les grandeurs cinématiques caractéristiques associées à la fonction réalisée (vitesse linéaire et/ou angulaire d'entrée et de sortie).

Commentaires : les problématiques proposées doivent conduire l'élève à :
- observer, manipuler et décrire la constitution physique des assemblages et guidages concernés,
- établir un modèle associé (dans les cas simples) et décrire les paramètres influents,
- mesurer les valeurs des paramètres cinématiques d'entrée, de sortie, intermédiaires.

1- Cinématique des mécanismes : généralités

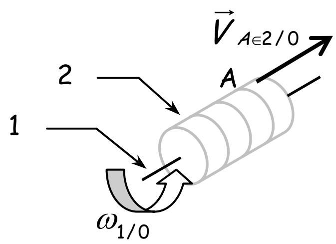
La cinématique est la partie de la mécanique qui étudie les mouvements des solides indépendamment des causes qui les provoquent. Les grandeurs physiques qui interviennent sont :
- le temps [s] ;
- les longueurs [m] ;
- les angles [rad].

2- Nature et caractéristiques d'un mouvement

2-1- Mouvement spatial

Le seul mouvement spatial étudié en pré-bac est le mouvement hélicoïdal, c'est-à-dire celui de l'écrou par rapport à la vis dans un système vis-écrou (liaison hélicoïdale).

Le mouvement hélicoïdal de 2 par rapport à 1 permet de transformer le mouvement de rotation de 1 par rapport à 0 en un mouvement de translation de 2 par rapport à 0.



Relations géométriques et cinématiques

Rotation de la vis de 1 tour → Déplacement de l'écrou du pas p [m]

Rotation de la vis de 2π [rad] → Déplacement de l'écrou du pas p [m]
Rotation de la vis de $\theta_{1/0}$ [rad] → Déplacement de l'écrou de x [m]

Produit en croix

D'où la relation entre les déplacements (linéaire et angulaire) : $\boxed{x_{A\in 2/0} = \theta_{1/0} \cdot \frac{p}{2\pi}}$

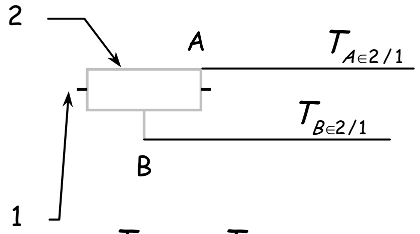
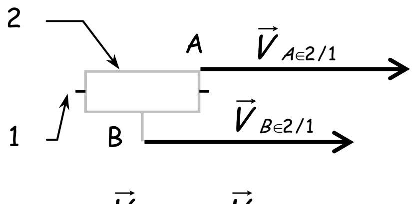
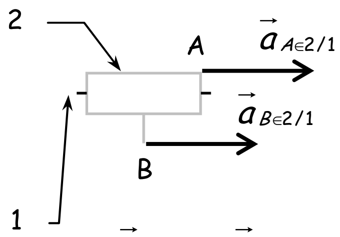
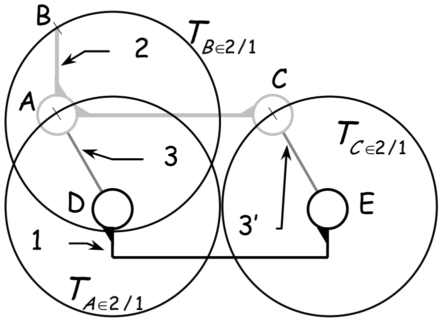
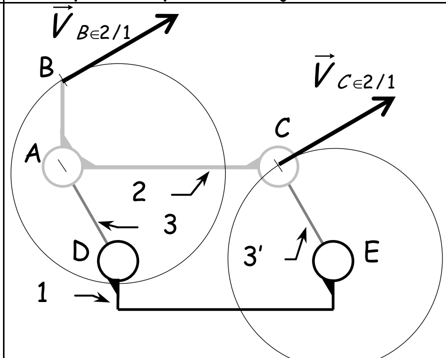
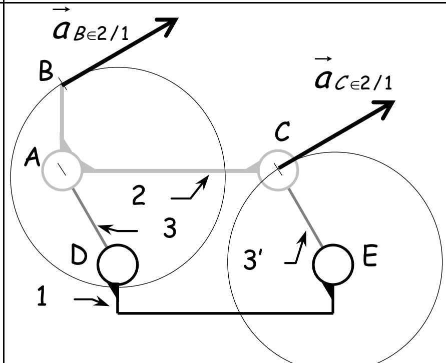
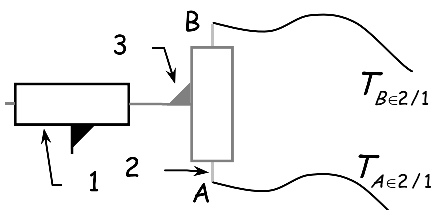
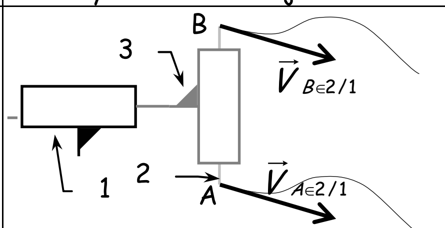
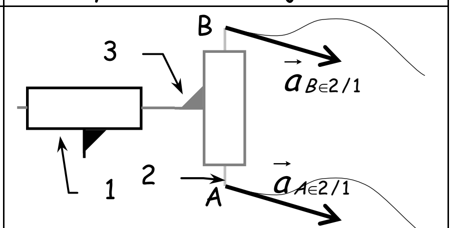
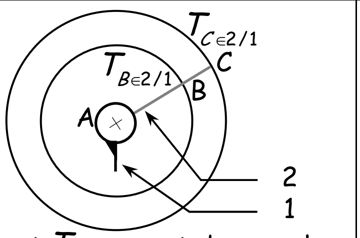
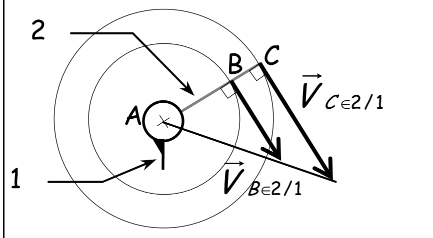
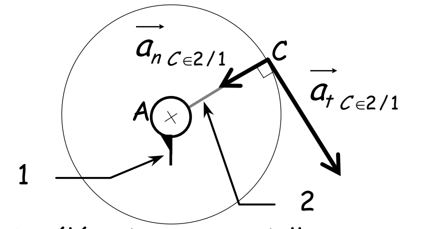
Puis celle entre les vitesses (linéaire et angulaire) : $\boxed{V_{A\in 2/0} = \omega_{1/0} \cdot \frac{p}{2\pi}}$

$V_{A\in 2/0}$ en [m.s^{-1}] et $\omega_{1/0}$ en [rad.s^{-1}]

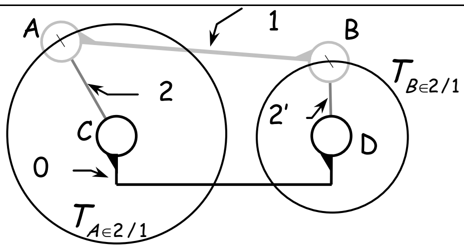
Et enfin celle entre les accélérations (linéaire et angulaire) : $\boxed{a_{A\in 2/0} = \ddot{\theta}_{1/0} \cdot \frac{p}{2\pi}}$

$a_{A\in 2/0}$ en [m.s^{-2}] et $\ddot{\theta}_{1/0}$ en [rad.s^{-2}]

2-2- Mouvement plan

Nature		Trajectoire	Vitesse	Accélération
Mouvement de translation…	…rectiligne de 2/1	 $T_{A\in 2/1} = T_{B\in 2/1}$ segments de droites parallèles ; 2 reste parallèle à lui-même.	 $\vec{V}_{A\in 2/1} = \vec{V}_{B\in 2/1}$ vecteurs tangents à la trajectoire aux points considérés, donc ici portés par la trajectoire	 $\vec{a}_{A\in 2/1} = \vec{a}_{B\in 2/1}$ vecteurs colinéaires aux vecteurs vitesse
	…circulaire de 2/1	 $T_{A\in 2/1} = T_{B\in 2/1} = T_{C\in 2/1}$ Cercles de même rayon mais de centres différents ; 2 reste parallèle à lui-même ;	 $\vec{V}_{A\in 2/1} = \vec{V}_{B\in 2/1} = \vec{V}_{C\in 2/1}\ [\mathrm{m.s^{-1}}]$ vecteurs tangents à la trajectoire aux points considérés, donc ici perpendiculaires aux « segments-rayons » de la trajectoire	 $\vec{a}_{A\in 2/1} = \vec{a}_{B\in 2/1} = \vec{a}_{C\in 2/1}\ [\mathrm{m.s^{-2}}]$ vecteurs tangents à la trajectoire aux points considérés, donc ici perpendiculaires aux « segments-rayons » de la trajectoire
	…curviligne de 2/1	 $T_{A\in 2/1} = T_{B\in 2/1}$ courbes superposables ; 2 reste parallèle à lui-même ;	 $\vec{V}_{A\in 2/1} = \vec{V}_{B\in 2/1}\ [\mathrm{m.s^{-1}}]$ vecteurs tangents à la trajectoire aux points considérés	 $\vec{a}_{A\in 2/1} = \vec{a}_{B\in 2/1}\ [\mathrm{m.s^{-2}}]$ vecteurs tangents à la trajectoire aux points considérés
	conclusio	Les trajectoires sont superposables <u>pour au moins trois points du solide</u> ; 2 reste parallèle à lui-même ;	Le champ (ensemble) des vecteurs vitesse est uniforme	Le champ des vecteurs accélération est uniforme
Mouvement de rotation de 2/1		 $T_{A\in 2/1}$ et $T_{B\in 2/1}$ sont des cercles concentriques (centre A) de rayons différents	 2 tourne par rapport à 1 à la vitesse angulaire $\omega_{2/1}$ $\boxed{V_{B\in 2/1} = AB.\omega_{2/1}}$ $V_{B\in 2/1}\ [\mathrm{m.s^{-1}}]$; $\omega_{2/1}\ [\mathrm{rad.s^{-1}}]$; AB [m].	 Accélération tangentielle : $\boxed{a_{t\,C\in 2/1} = AC.\ddot{\theta}_{2/1}}$ $a_{C\in 2/1}\ [\mathrm{m.s^{-2}}]$; $\ddot{\theta}_{2/1}\ [\mathrm{rad.s^{-2}}]$ Accélération normale : $\boxed{a_{n\,C\in 2/1} = \frac{V_{C\in 2/1}^{\;2}}{AC} = AC.\omega_{2/1}^{\;2}}$ $\omega_{2/1}$ en $[\mathrm{rad.s^{-1}}]$

2-3- Propriétés du mouvement plan

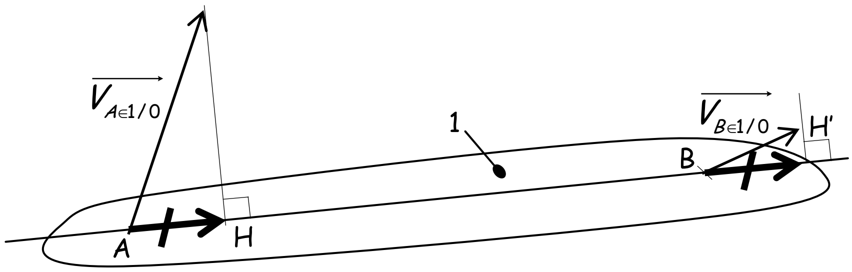
Nature	Trajectoire	Vitesse	Accélération
Mouvement plan général de 1/0	 Dans cet exemple, les trajectoires de A et B sont des cercles de centres et rayons différents ; Elles ne sont donc : - ni superposables $\Rightarrow$ ce n'est pas une translation, - ni des cercles concentriques $\Rightarrow$ ce n'est pas une rotation. D'autres couples de trajectoires non superposables et non circulaires concentriques pourront se présenter à nous dans nos différentes études de cas.	Pour l'étude des vitesses et accélérations des points A et B, voir le mouvement de rotation ou de translation en page 2, ainsi que les propriétés du mouvement plan ci-après.	

2-3-1- Equiprojectivité

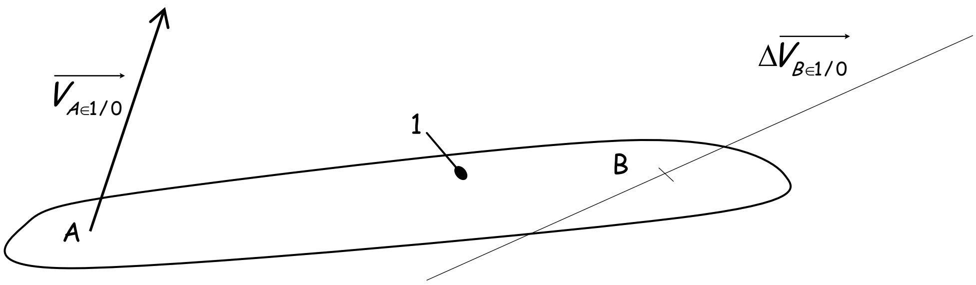
Equiprojectivité signifie « égale projection ».

En effet, à chaque instant, pour deux points A et B appartenant au solide 1 en mouvement plan par rapport à 0 (voir exemple dans tableau ci-dessus), les **projections orientées** $\overrightarrow{AH}$ du vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{A\in 1/0}}$ sur (AB) et $\overrightarrow{AH'}$ du vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{B\in 1/0}}$ sur (AB) sont égales.

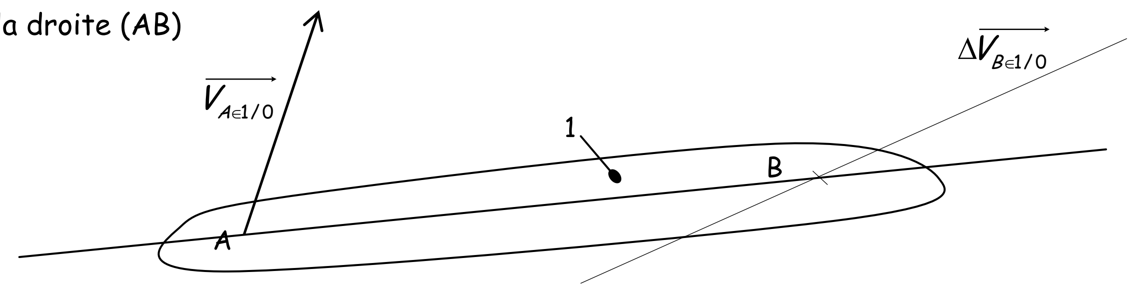
$$\boxed{\overrightarrow{V_{A\in 1/0}}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V_{B\in 1/0}}.\overrightarrow{AB}}$$



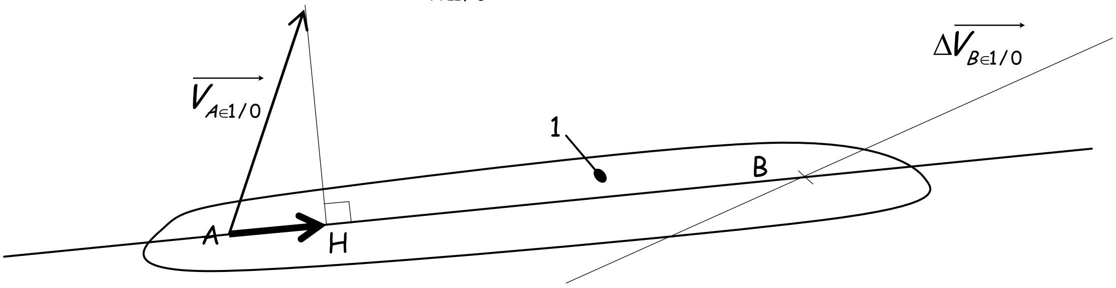
Méthode graphique permettant de déterminer complètement $\overrightarrow{V_{B\in 1/0}}$ connaissant sa direction $\Delta\overrightarrow{V_{B\in 1/0}}$ et connaissant complètement $\overrightarrow{V_{A\in 1/0}}$



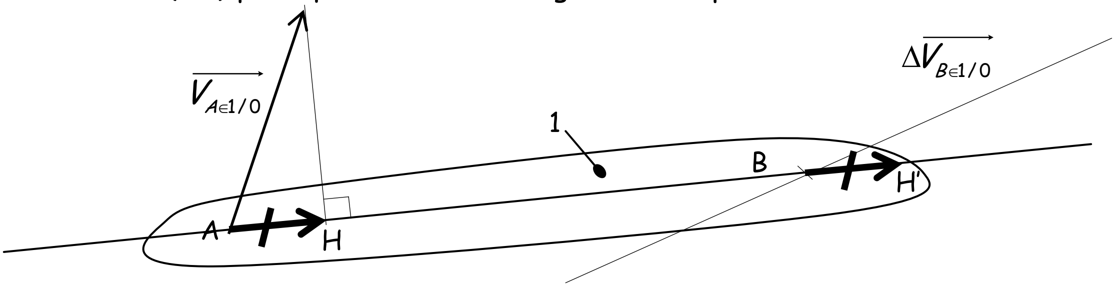
Etape 1 : Tracer la droite (AB)



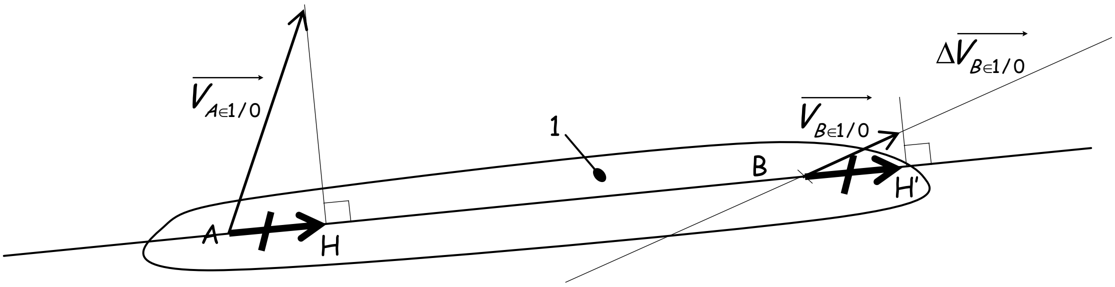
Etape 2 : Effectuer la projection orthogonale de $\overrightarrow{V_{A\in 1/0}}$ sur (AB) : $\overline{AH}$



Etape 3 : Faire glisser $\overline{AH}$ sur (AB) pour que sa nouvelle origine soit le point B : on obtient $\overline{BH'}$



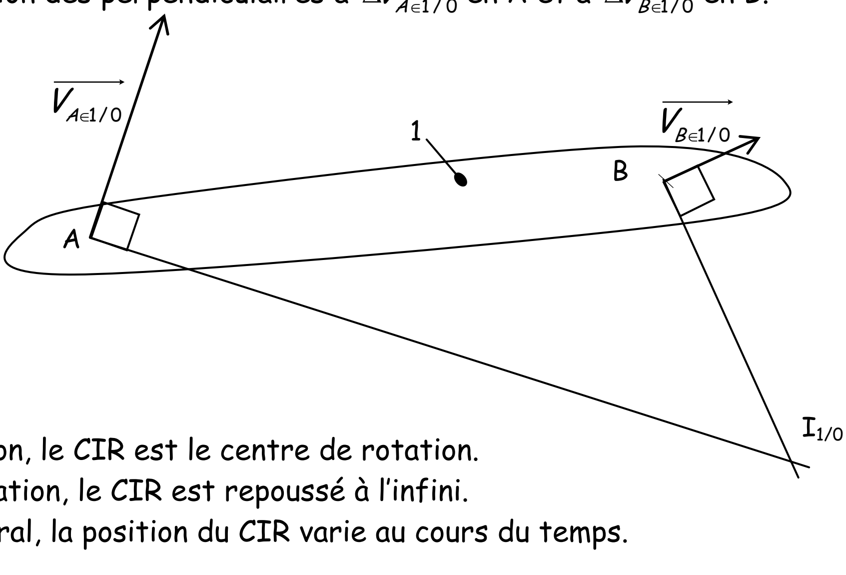
Etape 4 : Tracer la perpendiculaire à (AB) passant par H'. Le point d'intersection de cette perpendiculaire avec $\Delta\overrightarrow{V_{B\in 1/0}}$ nous permet de définir complètement $\overrightarrow{V_{B\in 1/0}}$, aussi bien en sens qu'en intensité.



2-3-2- Le Centre Instantané de Rotation (C.I.R.)

A chaque instant, pour un solide 1 en mouvement plan par rapport à un solide 0, il existe un point unique $I_{1/0}$ appelé CIR dont la vitesse est **nulle** : $\overrightarrow{V_{I\in 1/0}} = \vec{0}$; Cela revient à dire que le solide est en rotation autour de ce point à chaque instant. Un mouvement plan est donc une succession de mouvements de rotation de centres différents.

Le CIR est situé à l'intersection des perpendiculaires à $\Delta\overrightarrow{V_{A\in 1/0}}$ en A et à $\Delta\overrightarrow{V_{B\in 1/0}}$ en B.



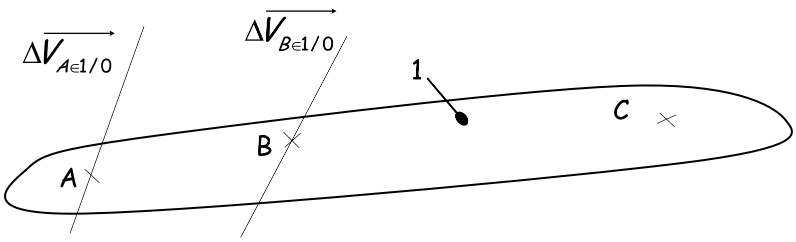
Remarques :

Pour un mouvement de rotation, le CIR est le centre de rotation.

Pour un mouvement de translation, le CIR est repoussé à l'infini.

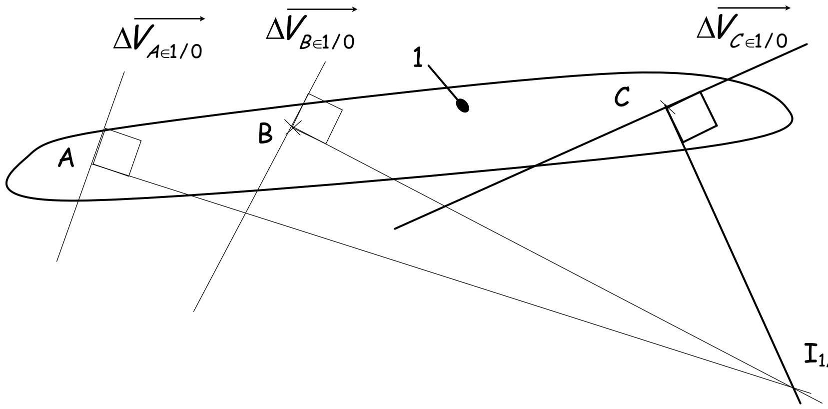
Pour un mouvement plan général, la position du CIR varie au cours du temps.

Méthode graphique permettant de déterminer $\Delta\overrightarrow{V_{C\in1/0}}$ connaissant $\Delta\overrightarrow{V_{A\in1/0}}$ et $\Delta\overrightarrow{V_{B\in1/0}}$



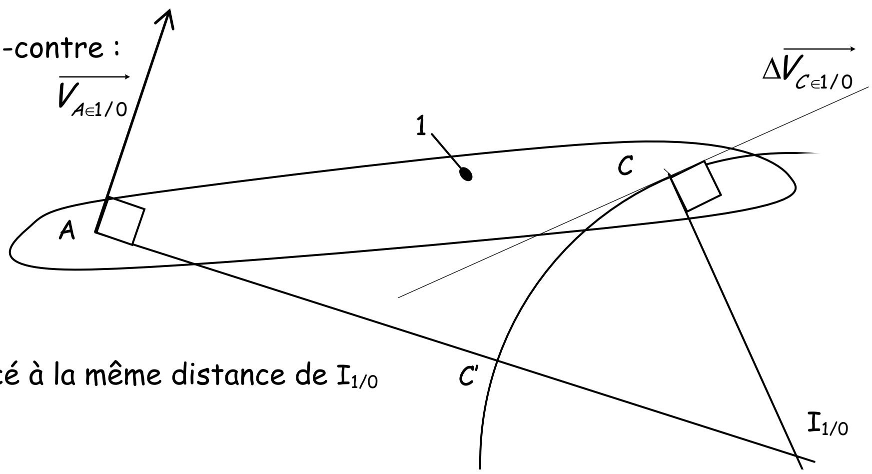
Tracer les perpendiculaires à $\Delta\overrightarrow{V_{A\in1/0}}$ en A et à $\Delta\overrightarrow{V_{B\in1/0}}$ en B : l'intersection donne $I_{1/0}$.

Puisqu'à chaque instant <u>1</u> est en rotation par rapport à <u>0</u>, autour de $I_{1/0}$, $\Delta\overrightarrow{V_{C\in1/0}}$ est la perpendiculaire à ($CI_{1/0}$) en C.



Méthode de « proportionnalité des vitesses » ou du « triangle des vitesses », permettant de déterminer complètement $\overrightarrow{V_{C\in1/0}}$ connaissant $\Delta\overrightarrow{V_{C\in1/0}}$, $I_{1/0}$, et $\overrightarrow{V_{A\in1/0}}$

<u>Etape 1</u> : Tracer C' comme sur le schéma ci-contre :

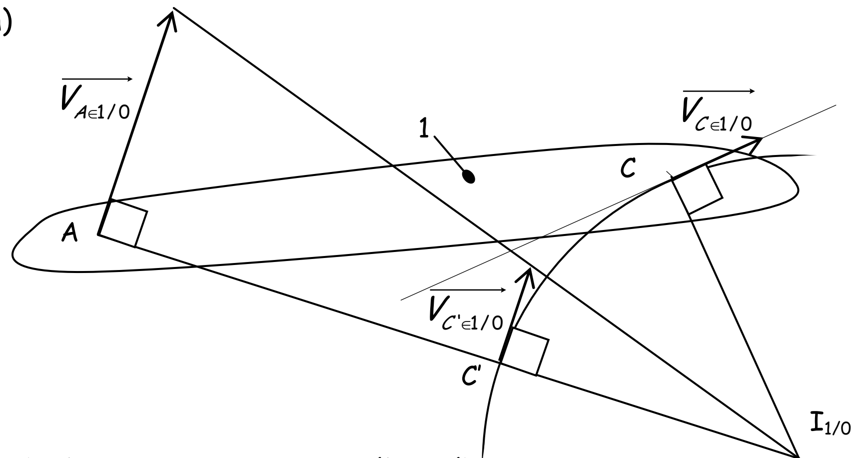


C' a la même vitesse que C puisqu'il est placé à la même distance de $I_{1/0}$

<u>Etape 2</u> : Tracer la droite de proportionnalité des vitesses (le champ des vecteurs vitesse est en effet triangulaire dans un mouvement de rotation)

On en déduit $\overrightarrow{V_{C'\in1/0}}$,

Puis $\overrightarrow{V_{C\in1/0}}$ telle que $\left\|\overrightarrow{V_{C\in1/0}}\right\| = \left\|\overrightarrow{V_{C'\in1/0}}\right\|$



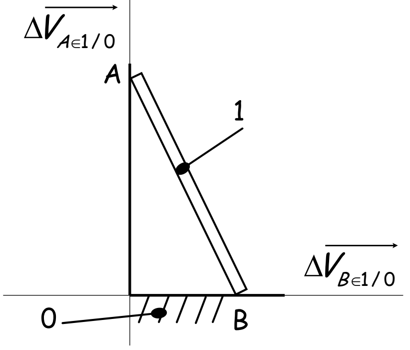
<u>2-3-3- Choix de la méthode</u>

Suivant les cas, on choisira cette méthode (si le CIR n'est pas trop éloigné) ou l'équiprojectivité (si les projections sont assez grandes).

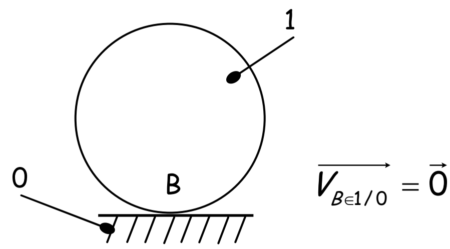
2-4- Vecteur vitesse de glissement (points coïncidents)

Le vecteur vitesse de glissement, s'il existe, est porté par la tangente au contact entre deux pièces (c'est-à-dire par la perpendiculaire à la normale de contact).

* Exemple 1 : **avec glissement** (Echelle contre un mur)

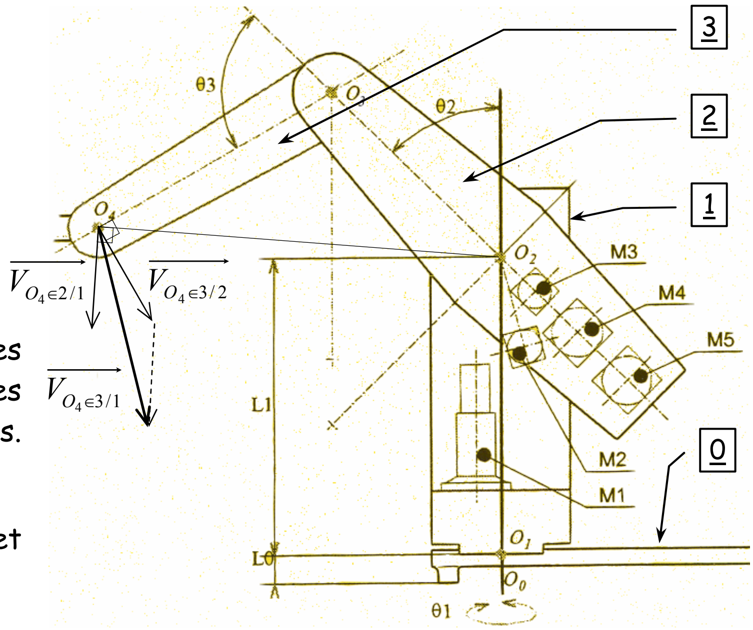


* Exemple 2 : Mouvement de **roulement sans glissement** (*Système pignon-crémaillère*)



Remarque : $A\in 1$ et $A\in 0$ sont deux points coïncidents, ainsi que $B\in 1$ et $B\in 0$.

2-5- Loi de composition des vitesses



1er exemple : le bras de robot Ericc :

0 : socle 2 : bras
1 : buste 3 : avant-bras

Hypothèse : Les points O_2, O_3 et O_4 sont coplanaires et les articulations sont des liaisons pivots d'axes perpendiculaires au plan formé par ces trois points. Le buste est fixe par rapport au socle.

Le bras décrit θ_2 à la vitesse angulaire $\omega_{2/1}$ et l'avant-bras décrit θ_3 à la vitesse angulaire $\omega_{3/2}$.
On recherche la vitesse absolue $\overrightarrow{V_{O_4\in 3/1}}$.

La loi de composition des vitesses angulaires est $\omega_{3/1} = \omega_{3/2} + \omega_{2/1}$

La loi de composition des vitesses est : $\boxed{\overrightarrow{V_{O_4\in 3/1}} = \overrightarrow{V_{O_4\in 3/2}} + \overrightarrow{V_{O_4\in 2/1}}}$

Vitesse absolue de O_4 pour les deux mouvements simultanés

Vitesse d'entraînement de O_4 :
$\left\|\overrightarrow{V_{O_4\in 2/1}}\right\| = O_2O_4.\omega_{2/1}$

Vitesse relative de O_4 :
$\left\|\overrightarrow{V_{O_4\in 3/2}}\right\| = O_3O_4.\omega_{3/2}$

2ème exemple : système à came 8 et galet 17

$\boxed{\overrightarrow{V_{B\in 7/5}} = \overrightarrow{V_{B\in 7/17}} + \overrightarrow{V_{B\in 17/8}} + \overrightarrow{V_{B\in 8/5}}}$

Avec $\overrightarrow{V_{B\in 17/8}} = \vec{0}$ car $Mvt_{17/8}$ = roulement sans glissement