MODELISATION DES ACTIONS MECANIQUES

1) NOTION D'ACTION MECANIQUE

On appelle action mécanique toute cause susceptible de :

- Créer ou modifier un mouvement ;
- Maintenir un corps au repos ;
- Déformer un corps .

2) DIFFERENTS TYPES D'ACTIONS MECANIQUES

2.1) LES ACTIONS MECANIQUES A DISTANCE

En construction mécanique, elles sont essentiellement de type **magnétique** ou de **pesanteur.**

2.2) LES ACTIONS MECANIQUES DE CONTACT

Elles résultent : - Soit du contact d'un **fluide** (gaz ou liquide) sur un **solide**
- Soit du contact d'un **solide** avec un autre **solide**

3) LE MODELE DE LA FORCE

3.1) CAS DU CONTACT PONCTUEL PARFAIT (Sans Frottements)

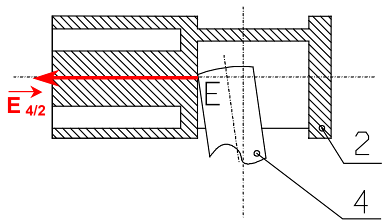
L'action mécanique qui s'exerce entre deux solides en contact ponctuel est modélisée par une force qui a les caractéristiques d'un vecteur (voir ci-contre).

Désignation d'une force :

$\overrightarrow{E_{(4/2)}}$

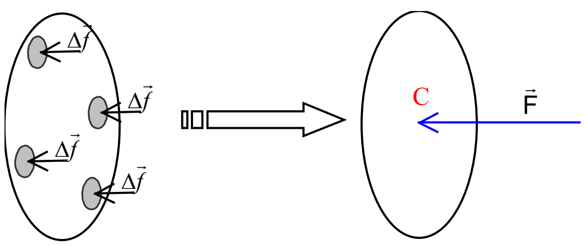
- 2 : solide sollicité
- 4 : solide qui exerce la force
- E : point d'application de la force

- origine : le point de contact ; E
- direction : normale au plan tangent de contact ; donc suivant $\vec{X}$.
- sens : du solide qui exerce l'action mécanique vers le solide qui la subit ; suivant les $\vec{X}$ négatifs,
- norme : cette grandeur s'exprime en Newton (N) ; ici elle dépend, entre autre, du niveau de l'eau dans la cuve.



3.2) CAS DES CONTACTS NON PONCTUELS

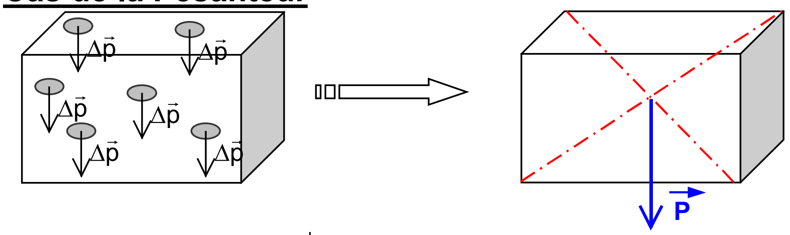
3.2.1) Cas de la Pression d'un Fluide sur une Paroi Plane



La pression sera supposée uniforme. Elle s'applique en chaque élément de surface de la paroi. Nous avons donc une infinité de forces élémentaires $\Delta\vec{f}$. Leur somme nous donne une force appelée force de pression $\vec{F}$, ayant les caractéristiques suivantes :

- **point d'application** : le centre de la surface, C
- **direction** : perpendiculaire à la surface de contact entre le fluide et la pièce
- **sens** : dirigé vers la paroi
- **norme** : $\|\vec{F}\| = p.S$, avec :
  - F : effort développé (N)
  - p : pression **uniforme** du fluide (Pa)
  - S : surface de la paroi plane, en (m^2)

3.2.2) Cas de la Pesanteur



On considère un solide indéformable. La pesanteur s'applique en chaque élément de matière de ce solide. Nous avons donc une infinité de forces élémentaires $\Delta\vec{p}$. Leur somme nous donne une force appelée **force de pesanteur** $\vec{P}$, ayant les caractéristiques ci-contre :

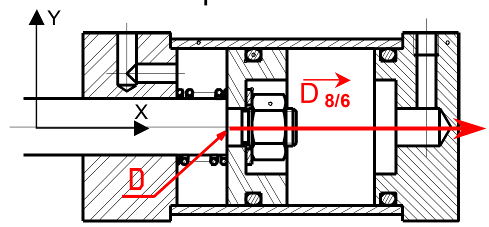
- **point d'application :** G, le centre de gravité du solide ou du système
- **direction** : verticale passant par G
- **sens** : vers le bas
- **norme** : $\|\vec{P}\| = m.g$, avec :
  - P : **poids** en Newton (**N**)
  - m : **masse** du solide ou du système en kilogrammes (**kg**)
  - g : **accélération** de la pesanteur = 9.81 $m.s^{-2}$

3.3.3) Cas de l'Action d'un Ressort de Compression

L'action mécanique qu'exerce un ressort sur une pièce peut être modélisée par une force, dont les caractéristiques sont :

- **point d'application** : centre du cercle de contact,
- **direction** : selon l'axe du ressort,
- **sens** : du ressort vers la pièce,
- **norme** : proportionnelle à la variation de longueur du ressort (de sa déformation) : $F = k\,(l_0 - l)$
  avec k : raideur du ressort (constante – N/mm),
  l_0 : longueur à vide du ressort (mm),
  l : longueur comprimée du ressort (mm).

Exemple : effort du ressort sur le piston.



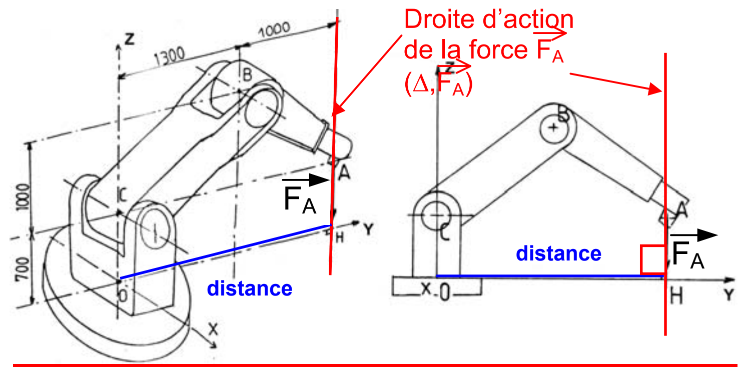
4) LE MOMENT D'UNE FORCE

4.1) MOMENT D'UNE FORCE PAR RAPPORT A UN AXE

4.1.1) Cas où la Force est Orthogonale à l'Axe

DEFINITION : On appelle moment d'une force $\vec{F_A}$ par rapport à un axe $(O,\vec{x})$, le produit de la norme de la force ($\|\vec{F_A}\|$) par la distance de la droite d'action de la force à l'axe considéré, affecté d'un signe défini ci-dessous :

- **+** si la force tend à provoquer une rotation autour de l'axe dans le sens positif $(\vec{x}\to\vec{y}, \vec{y}\to\vec{z}$ ou $\vec{z}\to\vec{x})$.
- **-** si la force tend à provoquer une rotation autour de l'axe dans le sens négatif.



$$\boxed{M_{Ox}(\vec{F_A}) = \pm(\|\vec{F_A}\| \times OH) \text{ ou } \pm(OH \times \|\vec{F_A}\|) \text{ ou } \pm(d \times \|\vec{F}\|)}$$

L'unité du moment est le Newton-mètre (N.m)
d : distance la plus courte à la droite d'action (m)
$\|\vec{F}\|$: norme de la force (N)

Le moment d'une force par rapport à un axe est nul si le support de la force et l'axe du moment considéré appartiennent à un même plan.

4.1.2) Cas où la Force est Parallèle à l'Axe

Le moment d'une force par rapport à un axe qui lui est parallèle est nul.

$$\boxed{M_{Oz}(\vec{F_A})=0 \text{ car } \vec{F_A} \text{ est parallèle à } (O,\vec{z})}$$

4.2) MOMENT D'UNE FORCE PAR RAPPORT A UN POINT, NOTION DE VECTEUR MOMENT

4.2.1) Notion de Vecteur Moment

DEFINITION : On appelle vecteur moment de $\vec{F_A}$ au point O, $\overrightarrow{M_O(\vec{F_A})}$, le vecteur dont les coordonnées ou composantes sont les moments par rapport aux trois axes :

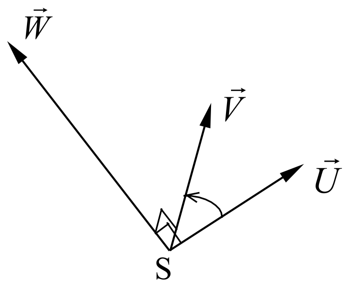
$$\overrightarrow{M_O(\vec{F_A})} = \begin{vmatrix} M_{Ox}(\vec{F_A}) \\ M_{Oy}(\vec{F_A}) \\ M_{Oz}(\vec{F_A}) \end{vmatrix}$$

Remarque : $\vec{F_A}$ et $\overrightarrow{M_O(\vec{F_A})}$ sont perpendiculaires

4.2.2) Détermination Analytique, Produit Vectoriel

DEFINITION : Le produit vectoriel d'un vecteur $\vec{U}$ par un vecteur $\vec{V}$ que l'on notera $\vec{U} \wedge \vec{V}$ est le vecteur $\vec{W}$ dont un représentant d'origine M est tel que :

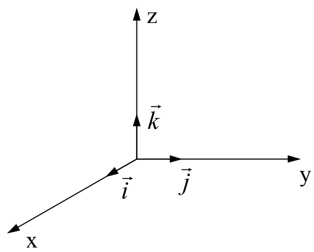
- Son support est perpendiculaire au plan (S, $\vec{U}$, $\vec{V}$)
- Son sens est tel que le trièdre ($\vec{U}$, $\vec{V}$, $\vec{W}$) soit direct
- Sa norme a pour valeur: $\|\vec{W}\| = \|\vec{U}\| \times \|\vec{V}\| . |\sin(\vec{U},\vec{V})|$



PROPRIETES :

- $\vec{W} = \vec{0}$ dans les cas suivants :
  - $\vec{U} = \vec{0}$
  - $\vec{V} = \vec{0}$
  - $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont colinéaires.
- Dans un repère orthonormé direct ayant pour vecteur pour vecteurs de base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, on a :

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \;\; ; \;\; \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \;\; ; \;\; \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$$



Expression analytique du moment $\overrightarrow{M_S(\vec{F_A})}$ dans un repère orthonormé direct R_0 :

Soient a, b et c les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{SA}$ dans $\mathbf{R_0}$.

Soient X, Y et Z les coordonnées du vecteur $\vec{F_A}$ dans $\mathbf{R_0}$.

Pour obtenir le produit vectoriel $\overrightarrow{SA} \wedge \vec{F_A}$ (qui est le moment en S de $\vec{F_A}$) on effectue les produits en croix comme ci-dessous:

$$\overrightarrow{M_S(\vec{F_A})} = \overrightarrow{SA} \wedge \vec{F_A}$$

$$= \begin{array}{c|c} & a \\ & b \\ R_0 & c \\ & a \end{array} \wedge \begin{array}{|c} X \\ Y \\ Z \\ X \end{array} = \begin{array}{c|l} & b \times Z - c \times Y \\ & c \times X - a \times Z \\ R_0 & a \times Y - b \times X \end{array}$$

5) LE TORSEUR

5.1) EXPRESSION DU TORSEUR

C'est la modélisation la plus générale pour une action mécanique. Elle permet, entre autres, de modéliser l'action mécanique transmissible par une liaison mais aussi les actions mécaniques de pesanteur, de pression et d'un ressort vues précédemment.

Définition :

Soient deux sous-ensembles 1 et 2 d'un mécanisme en liaison de centre A. L'action mécanique de 1 sur 2 est modélisée par l'association des vecteurs : $\overrightarrow{F_{A\,1/2}}$ et $\overrightarrow{M_{A(1/2)}}$.

L'ensemble $\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{F_A}\\ \overrightarrow{M_{A(1/2)}}\end{matrix}\right.$ s'appelle **Torseur associé à l'action mécanique de 1 sur 2.**

$\overrightarrow{F_{A\,1/2}}$ est appelée **résultante** du torseur.

$\overrightarrow{M_{A(1/2)}}$ est appelé **moment résultant en A** du torseur associé.

$\overrightarrow{F_{A\,1/2}}$ et $\overrightarrow{M_{A(1/2)}}$ sont les **éléments de réduction** du torseur **au point A**.

Notation :

$$\{\mathcal{T}_{1/2}\} = {}_A\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{F_A}\\ \overrightarrow{M_{A(1/2)}}\end{matrix}\right\} = {}_A\left\{\begin{matrix}X_{1/2} & L_{A1/2}\\ Y_{1/2} & M_{A1/2}\\ Z_{1/2} & N_{A1/2}\end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

où (A; $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$) représente le repère local associé à la liaison.

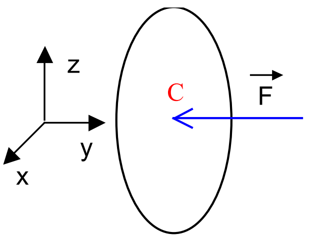
Transport d'un Torseur :

On a : $\{\mathcal{T}_{1/2}\} = {}_A\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{F_A}\\ \overrightarrow{M_{A(1/2)}}\end{matrix}\right\}$ au point de réduction A, et on veut le "transporter" (le déplacer) au point B. On montre que le torseur, déplacé au point B, s'écrit :

$$\{\mathcal{T}_{1/2}\} = {}_B\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{F_B} = \overrightarrow{F_A}\\ \overrightarrow{M_{B(1/2)}} = \overrightarrow{M_{A(1/2)}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{F_A}\end{matrix}\right\}$$

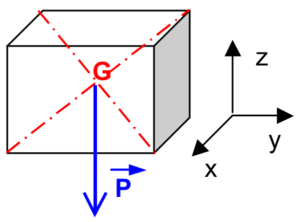
5.2) TORSEURS DE QUELQUES ACTIONS MECANIQUES DEJA VUES

5.2.1) Torseur de l'Action Mécanique de Pression



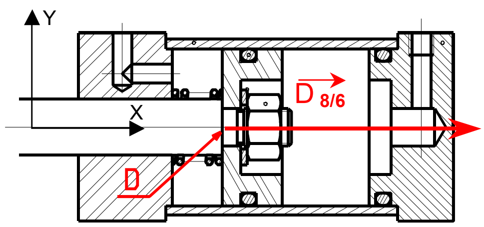
$$\{\mathcal{T}_{fluide/paroi}\} = {}_C\left\{\begin{matrix}\vec{F}\\ \overrightarrow{M_{C(f/p)}}\end{matrix}\right\} = {}_C\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ -F & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

5.2.2) Torseur de l'Action Mécanique de Pesanteur



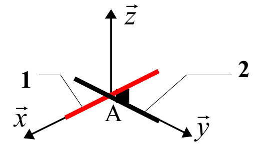
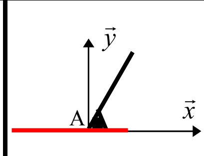
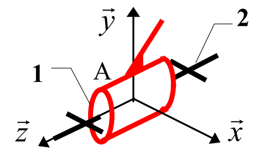
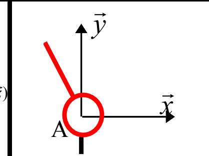
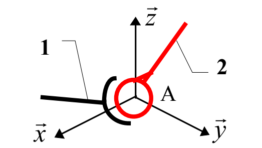
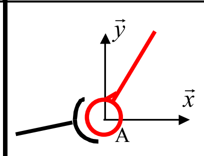
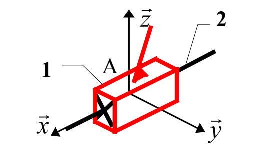
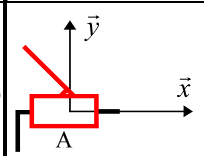
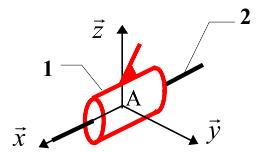
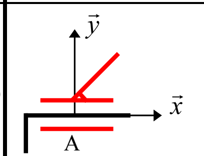
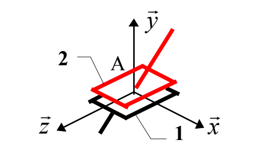
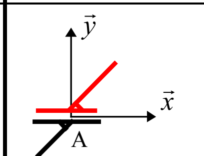
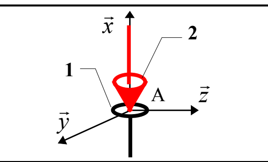
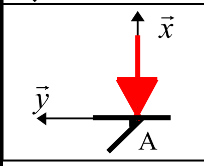
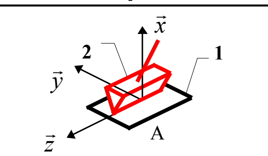
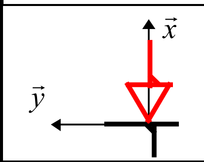
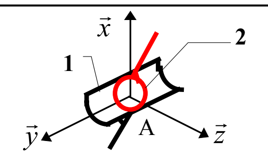
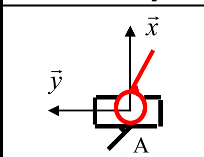
$$\{\mathcal{T}_{pesanteur}\} = {}_G\left\{\begin{matrix}\vec{P}\\ \overrightarrow{M_G}\end{matrix}\right\} = {}_G\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ -P & 0\end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

5.2.3) Torseur de l'Action Mécanique d'un Ressort



$$\{\mathcal{T}_{8/6}\} = {}_D\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{D_{8/6}}\\ \overrightarrow{M_{D(8/6)}}\end{matrix}\right\} = {}_D\left\{\begin{matrix}X_{8/6} & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

5.3) TORSEURS DANS LES LIAISONS

				Cas d'un problème plan de normale $\vec{z}$	
Nature de la liaison et repère associé : R	Schéma spatial	Mvts possibles	Torseur transmissible $\{\mathcal{T}_{1/2}\}$	Schéma plan	Torseur transmissible
Encastrement R quelconque		$\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$	${}_{A}\begin{Bmatrix} X_{A1/2} & L_{A1/2} \\ Y_{A1/2} & M_{A1/2} \\ Z_{A1/2} & N_{A1/2} \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$		${}_{A}\begin{Bmatrix} X_{1/2} & - \\ Y_{1/2} & - \\ - & N_{A1/2} \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
Pivot d'axe (A, $\vec{z}$)		$\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & Rz \end{matrix}$	${}_{A}\begin{Bmatrix} X_{1/2} & L_{A1/2} \\ Y_{1/2} & M_{A1/2} \\ Z_{1/2} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$		${}_{A}\begin{Bmatrix} X_{1/2} & - \\ Y_{1/2} & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
Rotule de centre A		$\begin{matrix} 0 & Rx \\ 0 & Ry \\ 0 & Rz \end{matrix}$	${}_{A}\begin{Bmatrix} X_{1/2} & 0 \\ Y_{1/2} & 0 \\ Z_{1/2} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$		${}_{A}\begin{Bmatrix} X_{1/2} & - \\ Y_{1/2} & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
Glissière d'axe (A, $\vec{x}$)		$\begin{matrix} Tx & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$	${}_{A}\begin{Bmatrix} 0 & L_{A1/2} \\ Y_{1/2} & M_{A1/2} \\ Z_{1/2} & N_{A1/2} \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$		${}_{A}\begin{Bmatrix} 0 & - \\ Y_{1/2} & - \\ - & N_{A1/2} \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
Pivot glissant d'axe (A, $\vec{x}$)		$\begin{matrix} Tx & Rx \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$	${}_{A}\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{1/2} & M_{A1/2} \\ Z_{1/2} & N_{A1/2} \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$		${}_{A}\begin{Bmatrix} 0 & - \\ Y_{1/2} & - \\ - & N_{A1/2} \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
Appui plan de normale (A, $\vec{y}$)		$\begin{matrix} Tx & 0 \\ 0 & Ry \\ Tz & 0 \end{matrix}$	${}_{A}\begin{Bmatrix} 0 & L_{A1/2} \\ Y_{1/2} & 0 \\ 0 & N_{A1/2} \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$		${}_{A}\begin{Bmatrix} 0 & - \\ Y_{1/2} & - \\ - & N_{A1/2} \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
Ponctuelle de normale (A, $\vec{x}$)		$\begin{matrix} 0 & Rx \\ Ty & Ry \\ Tz & Rz \end{matrix}$	${}_{A}\begin{Bmatrix} X_{1/2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$		${}_{A}\begin{Bmatrix} X_{1/2} & - \\ 0 & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
Linéaire rectiligne de normale (A, $\vec{x}$) et d'axe (A, $\vec{z}$)		$\begin{matrix} 0 & Rx \\ Ty & 0 \\ Tz & Rz \end{matrix}$	${}_{A}\begin{Bmatrix} X_{1/2} & 0 \\ 0 & M_{A1/2} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$		${}_{A}\begin{Bmatrix} X_{1/2} & - \\ 0 & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
Linéaire annulaire d'axe (A, $\vec{y}$)		$\begin{matrix} 0 & Rz \\ Ty & Ry \\ 0 & Rz \end{matrix}$	${}_{A}\begin{Bmatrix} X_{1/2} & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{1/2} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$		${}_{A}\begin{Bmatrix} X_{1/2} & - \\ 0 & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

ATTENTION : Liste non exhaustive des torseurs possibles.